

# Charakteryzacje rozkładów prawdopodobieństwa za pomocą wybranych funkcji z teorii niezawodności

Magdalena Szymkowiak

Politechnika Poznańska

Wielowymiarowe metody statystyczne w badaniach technicznych  
Wydział Matematyki i Informatyki UAM  
Poznań 15.03.2017

# Plan prezentacji

- 1 Charakteryzacje rozkładów jednowymiarowych
  - Rozkłady absolutnie ciągłe
  - Rozkłady dyskretne
- 2 Porządek intensywności starzenia
  - Porządek  $AI$  dla zmiennych losowych absolutnie ciągłych
  - Porządek  $AI$  dla zmiennych losowych dyskretnych
- 3 Analiza intensywności starzenia na podstawie danych
  - Estymator funkcji starzenia
  - Dane wygenerowane

## Motywacja

- Almalki, S.J., Nadarajah, S. (2014). Modifications of the Weibull distribution: A review. *Reliability Engineering and System Safety*, 124, 32–55.
- Bhattacharjee, S., Nanda, A.K., Misra, S.Kr., (2013). Reliability analysis using ageing intensity function. *Statistics and Probability Letters* 83, pp.1364-1371.
- Nanda, A.K., Bhattacharjee, S., Alam, S.S. (2007). Properties of aging intensity function. *Statistics and Probability Letters*, 77, 365–373.

# Motywacja

Teoria niezawodności bada własności obiektu, które ujawniają się w procesie jego działania

- czy obiekt działa poprawnie
- czy obiekt spełnia wszystkie powierzone mu funkcje
- czy obiekt działa w określonych warunkach
- czy obiekt działa przez określony CZAS

Zastosowanie w

- inżynierii, technice, przemyśle
- medycynie, demografii, biologii
- ekonomii, naukach społecznych

# Motywacja

## Charakterystyki funkcyjne czasu zdatności

- funkcja niezawodności (funkcja przeżycia)
- funkcja zawodności (dystrybuanta)
- funkcja gęstości
- intensywność uszkodzeń (funkcja hazardu, funkcja ryzyka)
- skumulowana intensywność uszkodzeń (funkcja wiodąca)
- intensywność starzenia

## Rozkłady o nośniku $(0, \infty)$ – oznaczenia

Niech  $X$  będzie absolutnie ciągłą zmienną losową o nośniku  $(0, \infty)$ .

Będziemy używać następujących oznaczeń

- $F(x) = P(X \leq x)$       dystrybuanta
- $\bar{F}(x) = P(X > x)$       funkcja niezawodności
- $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$       funkcja gęstości

## Rozkłady o nośniku $(0, \infty)$ – oznaczenia

Ponadto

- $r(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = \frac{f(x)}{P(X>x)}$  intensywność uszkodzeń

interpretacja - gęstość warunkowa uszkodzenia obiektu w chwili  $x$  pod warunkiem, że do tej chwili obiekt działał bezawaryjnie

- $H(x) = \frac{1}{x} \int_0^x r(u) du$  średnia intensywność uszkodzeń

- $L(x) = \frac{r(x)}{H(x)}$  intensywność starzenia  
(Jiang, Ji, Xiao (2003))

interpretacja - stosunek chwilowej intensywności uszkodzeń do średniej intensywności uszkodzeń

### Uwaga

$$L(x) = \frac{r(x)}{-\frac{1}{x} \ln \bar{F}(x)} = \frac{-x f(x)}{\bar{F}(x) \ln \bar{F}(x)} = x \frac{\frac{d \ln \bar{F}(x)}{dx}}{\ln \bar{F}(x)}$$

# Charakteryzacja za pomocą intensywności uszkodzeń

## Fakt 1 (Azlarov, Volodin (1986))

Intensywność uszkodzeń  $r$ , absolutnie ciągłej zmiennej losowej  $X$  o nośniku  $(0, \infty)$ , jednoznacznie determinuje jej funkcję niezawodności  $\bar{F}$  poprzez następującą zależność

$$\bar{F}(x) = \exp \left( - \int_0^x r(t) dt \right) \quad \text{dla } x \in (0, \infty).$$



## Dwuparametrowy rozkład Weibulla

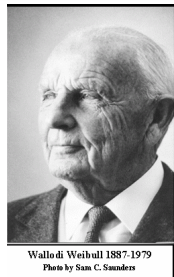
$X \sim W2(\alpha, \lambda)$  jeżeli dla  $x \in (0, \infty)$  oraz  $\alpha, \lambda > 0$

Wallodi Weibull, W. (1951).

A Statistical Distribution Function of Wide Applicability  
*Journal of Applied Mechanics*, 18, 293 – 296.

dystrybuanta  $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x^\alpha)$ , charakteryzuje

- odporność na zmęczenie stali St-37
- plastyczność stali Bofors (szwedzka firma produkująca broń)
- wytrzymałość włókien bawełny indyjskiej
- wielkość popiołu lotnego
- długość *Cyртоideae* (rodzaj muszli morskiej)
- wzrost dorosłych mężczyzn urodzonych na Wyspach Brytyjskich
- szerokość fasoli *Phaseolus Vulgaris*



## Dwuparametrowy rozkład Weibulla

$X \sim W2(\alpha, \lambda)$  jeżeli dla  $x \in (0, \infty)$  oraz  $\alpha, \lambda > 0$

- funkcja niezawodności  $\bar{F}(x) = \exp(-\lambda x^\alpha)$
- intensywność uszkodzeń  $r(x) = \lambda \alpha x^{\alpha-1}$
- intensywność starzenia  $L(x) = \frac{-x r(x)}{\ln \bar{F}(x)} = \alpha$

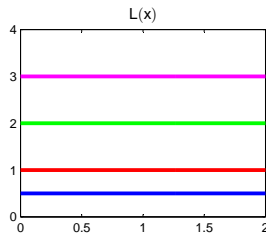
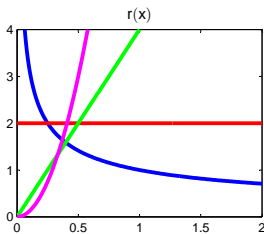
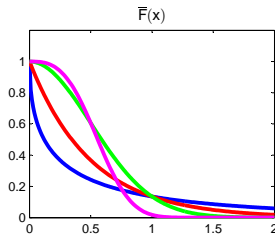
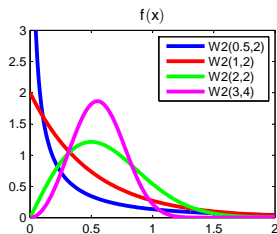
### Fakt 2 (Nanda, Bhattacharjee, Alam (2007))

Jeżeli dla zmiennej losowej  $X$ , intensywność starzenia  $L(x) = \alpha$ , dla  $x \in (0, \infty)$ ,  $\alpha > 0$ , to  $X \sim W2(\alpha, \lambda)$ , gdzie  $\lambda = -\frac{\ln \bar{F}(a)}{a^\alpha} > 0$ .

### Uwaga

Dla  $\alpha = 1$ ,  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , gdzie  $r(x) = \lambda$  oraz  $L(x) = 1$ .

# $W2(\alpha, \lambda)$



## Zmodyfikowany rozkład Weibulla

$X \sim MW(\alpha, \lambda, \beta)$  (Lai, Xie, Murthy (2003))

jeżeli dla  $x \in (0, \infty)$ ,  $\alpha, \lambda > 0$  oraz  $\beta \geq 0$

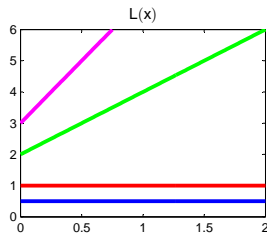
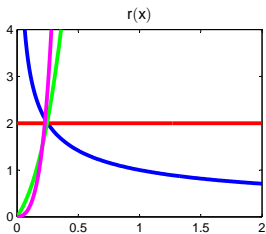
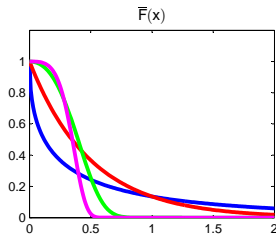
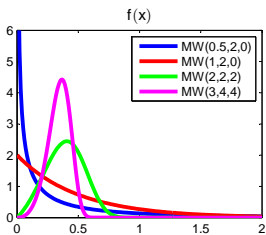
- funkcja niezawodności  $\bar{F}(x) = \exp(-\lambda x^\alpha \exp(\beta x))$
- intensywność uszkodzeń  $r(x) = \lambda(\alpha + \beta x)x^{\alpha-1} \exp(\beta x)$
- intensywność starzenia  $L(x) = \frac{-x r(x)}{\ln \bar{F}(x)} = \alpha + \beta x$

### Fakt 3 (Bhattacharjee, Nanda, Misra (2013))

Jeżeli dla zmiennej losowej  $X$ , intensywność starzenia

$L(x) = \alpha + \beta x$ , dla  $x \in (0, \infty)$  oraz  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$ , to  
 $X \sim MW(\alpha, \lambda, \beta)$ , gdzie  $\lambda = -\frac{1}{a^\alpha \exp(\beta a)} \ln \bar{F}(a) > 0$ .

# $MW(\alpha, \lambda, \beta)$



## Rozkłady dyskretne – oznaczenia

Niech  $X$  będzie dyskretną zmienną losową o nośniku  $\{1, 2, \dots\}$ .

Będziemy używać następujących oznaczeń

- $F(k) = P(X \leq k)$                       dystrybuanta
- $\bar{F}(k) = 1 - F(k) = P(X > k)$       funkcja niezawodności
- $P(X = k) = \bar{F}(k - 1) - \bar{F}(k) =$   
 $= F(k) - F(k - 1)$                       funkcja prawdopodobieństwa

## Rozkłady dyskretne – oznaczenia

Dla rozkładów dyskretnych

- $r(k) = -\ln \frac{\bar{F}(k)}{\bar{F}(k-1)}$  intensywność uszkodzeń  
(Roy, Gupta (1992))

$$\text{(analogia do } r(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = -\frac{d \ln \bar{F}(x)}{dx} \text{)}$$

### Fakt 4

Intensywność uszkodzeń  $r(k)$ , dyskretnej zmiennej losowej  $X$  o nośniku  $\{1, 2, \dots\}$ , jednoznacznie determinuje jej funkcję niezawodności  $\bar{F}$  poprzez następującą zależność

$$\bar{F}(k) = \exp \left( - \sum_{i=1}^k r(i) \right) \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots$$

## Rozkłady dyskretne – oznaczenia

Dla rozkładów dyskretnych

- $H(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k r(i) = -\frac{1}{k} \ln \bar{F}(k)$       średnia intensywność  
uszkodzeń  
(analogia do  $H(x) = \frac{1}{x} \int_0^x r(u) du$ );
- $L(k) = \frac{r(k)}{H(k)} = k \left[ 1 - \frac{\ln \bar{F}(k-1)}{\ln \bar{F}(k)} \right]$       intensywność starzenia  
(analogia do  $L(x) = \frac{r(x)}{H(x)}$ ).



# Charakteryzacja za pomocą intensywności starzenia

## Twierdzenie 1 (Szymkowiak, Iwińska (2016))

*Intensywność starzenia  $L(k)$  dyskretnej zmiennej losowej  $X$  o nośniku  $\{1, 2, \dots\}$  determinuje jej funkcję niezawodności  $\bar{F}$  poprzez następującą zależność*

$$\bar{F}(k) = \exp \left\{ \left[ \prod_{i=2}^k \left( 1 - \frac{L(i)}{i} \right) \right]^{-1} \ln q \right\} \quad \text{dla } k = 2, 3, \dots,$$

gdzie  $q = \bar{F}(1)$ ,  $0 < q < 1$ .

## Uwaga

Intensywność starzenia  $L(k)$  determinuje rodzinę rozkładów dyskretnych zależnych od parametru  $q = \bar{F}(1)$ .

## Rozkłady dyskretne – oznaczenia

Dalej, dla dyskretnej zmiennej losowej  $X$  o nośniku  $\{1, 2, \dots\}$  oznaczmy

- $L^*(k) = \frac{\ln \frac{\ln \bar{F}(k)}{\ln \bar{F}(k-1)}}{\ln \frac{k}{k-1}}, \quad k = 2, 3, \dots$

alternatywna intensywność starzenia

(analogia do  $L(x) = \frac{r(x)}{H(x)} = \frac{-x f(x)}{\bar{F}(x) \ln \bar{F}(x)} = \frac{d \ln(-\ln \bar{F}(x))}{d \ln x}$ )

### Fakt 5

Zachodzi zależność

$$L^*(k) = \frac{\ln \frac{k}{k-L(k)}}{\ln \frac{k}{k-1}} \quad \text{dla } k = 2, 3, \dots$$

# Charakteryzacja za pomocą alternatywnej intensywności starzenia

## Twierdzenie 2 (S., I. (2016))

Alternatywna intensywność starzenia  $L^*(k)$  dyskretnej zmiennej losowej  $X$  o nośniku  $\{1, 2, \dots\}$  determinuje jej funkcję niezawodności  $\bar{F}$  poprzez następującą zależność

$$\bar{F}(k) = \exp \left\{ \left[ \prod_{i=2}^k \left( \frac{i}{i-1} \right)^{L^*(i)} \right] \ln q \right\} \quad \text{dla } k = 2, 3, \dots,$$

gdzie  $q = \bar{F}(1)$ ,  $0 < q < 1$ .

## Uwaga

Alternatywna intensywność starzenia  $L^*(k)$  determinuje rodzinę rozkładów dyskretnych zależnych od parametru  $q = \bar{F}(1)$ .

# Charakteryzacja za pomocą $L$ lub $L^*$

## Uwaga

Wybór jednej z funkcji  $L$  lub  $L^*$  użytej do charakteryzacji danej klasy rozkładów dyskretnych zależy od specyficznej (wygodniejszej) postaci funkcji.

## Dyskretny rozkład Weibulla (I)

$X \sim DW(I)(q, \alpha)$  jeżeli dla  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\alpha > 0$ ,  $0 < q < 1$   
(Nakagawa, Osaki (1975))

- funkcja niezawodności  $\bar{F}(k) = q^{k^\alpha}$
- intensywność uszkodzeń  $r(k) = [(k-1)^\alpha - k^\alpha] \ln q$
- intensywność starzenia  $L(k) = \frac{k^\alpha - (k-1)^\alpha}{k^{\alpha-1}}$
- alternatywna intensywność starzenia  
 $L^*(k) = \alpha$ ,  $k = 2, 3, \dots$

### Uwaga

Dla  $\alpha = 1$ , zmienna losowa  $X$  ma rozkład geometryczny,  
 $X \sim G(q)$ ,  $r(k) = -\ln q$ ,  $L(k) = L^*(k) = 1$ .

## Charakteryzacja $DW(I)(q, \alpha)$

### Wniosek 1 (z Twierdzenia 1 i z Twierdzenia 2)

Jeżeli dla dyskretnej zmiennej losowej  $X$ , dla  $\alpha > 0$ ,

- intensywność starzenia

$$L(k) = \frac{k^\alpha - (k-1)^\alpha}{k^{\alpha-1}}, \text{ dla } k = 1, 2, \dots \text{ lub}$$

- alternatywna intensywność starzenia

$$L^*(k) = \alpha, \text{ dla } k = 2, 3, \dots,$$

to  $X \sim DW(I)(q, \alpha)$ , gdzie  $q = \bar{F}(1)$ ,  $0 < q < 1$ .

### Wniosek 2 (z Twierdzenia 1 i z Twierdzenia 2)

Jeżeli dla dyskretnej zmiennej losowej  $X$ ,

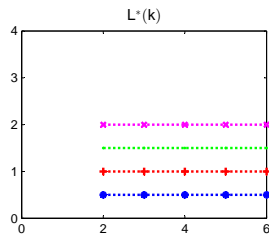
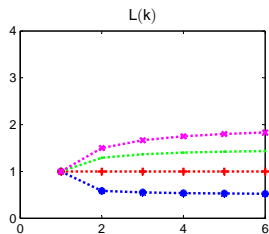
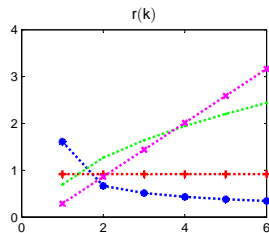
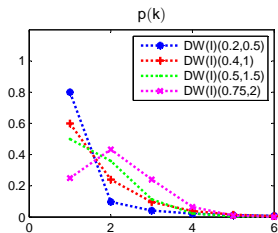
$$L(k) = 1, \text{ dla } k = 1, 2, \dots \text{ lub } L^*(k) = 1, \text{ dla } k = 2, 3, \dots,$$

to  $X \sim G(q)$ , gdzie  $q = \bar{F}(1)$ ,  $0 < q < 1$ .

### Uwaga

$L^*$  wydaje się być wygodniejsza do charakteryzacji  $DW(I)(q, \alpha)$ .

$$DW(I)(q, \alpha)$$



## Dyskretny zmodyfikowany rozkład Weibulla

Zmienna losowa  $X$  ma dyskretny zmodyfikowany rozkład Weibulla,  $X \sim DMW(q, \alpha, c)$ , jeżeli dla  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\alpha > 0$ ,  $0 < q < 1$ ,  $c \geq 1$ , (Nooghabi, Roknabadi, Borzadaran (2011))

- funkcja niezawodności  $\bar{F}(k) = q^{k^\alpha c^k}$
- intensywność uszkodzeń  $r(k) = c^{k-1} [(k-1)^\alpha - k^\alpha c] \ln q$
- intensywność starzenia  $L(k) = \frac{k^\alpha c - (k-1)^\alpha}{k^{\alpha-1} c}$
- alternatywna intensywność starzenia  $L^*(k) = \alpha + \frac{\ln c}{\ln \frac{k}{k-1}}$ ,  $k = 2, 3, \dots$



## Charakteryzacja $DMW(q, \alpha, c)$

### Wniosek 3 (z Twierdzenia 1 i z Twierdzenia 2)

Jeżeli dla dyskretnej zmiennej losowej  $X$ , dla  $\alpha > 0, c \geq 1$ ,

- intensywność starzenia

$$L(k) = \frac{k^\alpha c - (k-1)^\alpha}{k^{\alpha-1} c}, \text{ dla } k = 1, 2, \dots, \text{ lub}$$

- alternatywna intensywność starzenia

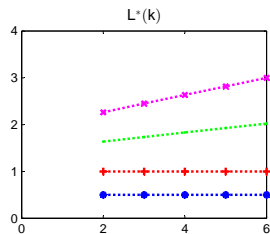
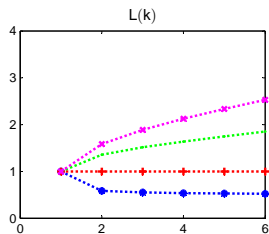
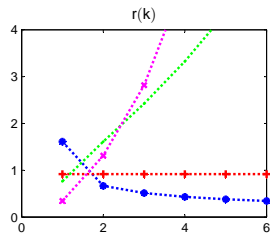
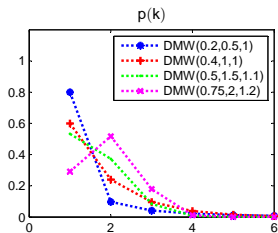
$$L^*(k) = \alpha + \frac{\ln c}{\ln \frac{k}{k-1}}, \text{ dla } k = 2, 3, \dots,$$

to  $X \sim DMW(q, \alpha, c)$ , gdzie  $q = \bar{F}(1)$ ,  $0 < q < 1$ .

### Uwaga

Żadna z funkcji  $L, L^*$  charakteryzujących  $DMW(q, \alpha, c)$  nie jest liniowa, co miało miejsce w przypadku  $MW(\alpha, \lambda, \beta)$ .

# DMW( $q, \alpha, c$ )



# Porządek $AI$

Niech  $X$  i  $Y$  będą absolutnie ciągłymi zmiennymi losowymi o wspólnym nośniku  $(0, \infty)$ .

Mówimy, że  $X$  jest większa od  $Y$  w

- porządku intensywności starzenia  $AI$   
(Nanda, Bhattacharjee, Alam (2007))

$$X \geq_{AI} Y \iff L_X(x) \leq L_Y(x), \forall x \in (0, \infty)$$

## Uwaga

Jeżeli zmienna losowa  $X$  ma mniejszą funkcję intensywności starzenia niż zmienna losowa  $Y$ , to

- $X$  jest większa (lepiej) w porządku intensywności starzenia  $AI$
- $X$  ma mniejszą tendencję do starzenia się

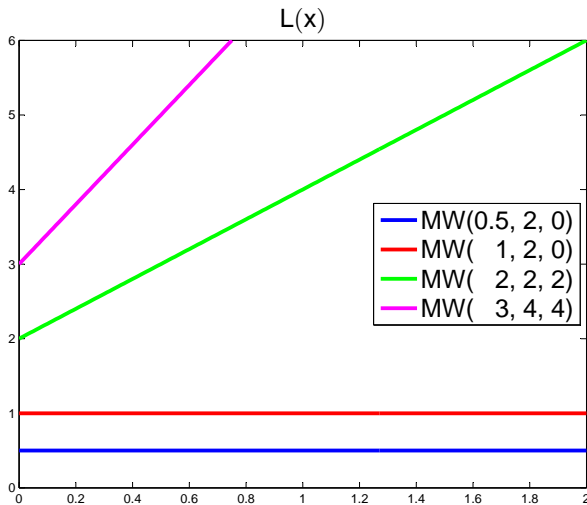
# Porządek AI dla rozkładów $MW(\alpha, \lambda, \beta)$

## Charakteryzacja $MW(\alpha, \lambda, \beta)$

Jeżeli dla zmiennej losowej  $X$ , intensywność starzenia  $L(x) = \alpha + \beta x$ , dla  $x \in (0, \infty)$  oraz  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$ , to  $X \sim MW(\alpha, \lambda, \beta)$ , gdzie  $\lambda = -\frac{1}{a^\alpha \exp(\beta a)} \ln \bar{F}(a) > 0$ .

## Twierdzenie 3 (Bhattacharjee, Nanda, Misra (2013a))

Jeżeli  $X_i \sim MW(\alpha_i, \lambda_i, \beta_i)$  dla  $i = 1, 2$  oraz  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  i  $\beta_1 \leq \beta_2$ , to  $L_{X_1}(x) \leq L_{X_2}(x)$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$  ( $\iff X_1 \geq_{AI} X_2$ ).

Porządek AI dla rozkładów  $MW(\alpha, \lambda, \beta)$ 

## Inne porządki stochastyczne

Niech  $X$  i  $Y$  będą absolutnie ciągłymi zmiennymi losowymi o wspólnym nośniku  $(0, \infty)$ .

Mówimy, że  $X$  jest większa od  $Y$  w

(i) porządku stochastycznym (stochastic order)

$$X \geq_{st} Y \iff \bar{F}_X(x) \geq \bar{F}_Y(x), \forall x \in (0, \infty),$$

(ii) porządku ilorazu wiarygodności (likelihood ratio order)

$$X \geq_{lr} Y \iff \frac{f_X(x)}{f_Y(x)} \text{ jest niemalejący, } \forall x \in (0, \infty),$$

(iii) porządku intensywności uszkodzeń (failure rate order)

$$X \geq_{fr} Y \iff r_X(x) \leq r_Y(x), \forall x \in (0, \infty),$$

(iv) rosnącym porządku wypukłym (increasing convex order)

$$X \geq_{icx} Y \iff \int_x^\infty \bar{F}_X(u) du \geq \int_x^\infty \bar{F}_Y(u) du, \forall x \in (0, \infty),$$

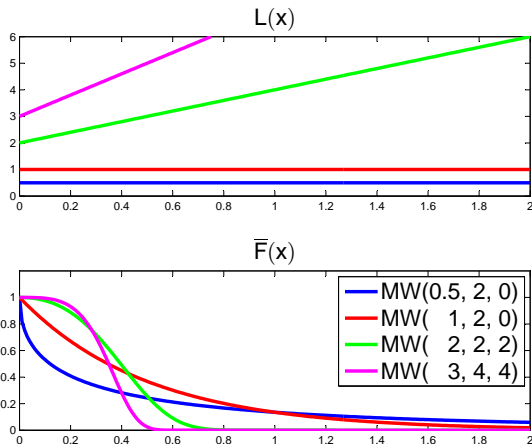
(v) porządku starzenia się szybciej (aging faster order)

(Sengupta, Deshpande (1994))

$$X \geq_{AF} Y \iff \frac{r_Y(x)}{r_X(x)} \text{ jest niemalejący, } \forall x \in (0, \infty),$$

## Związek między porządkiem $AI$ a porządkiem $st$

Na podstawie poniższych wykresów łatwo pokazać, że porządek  $AI$  nie implikuje porządku  $st$ .



## Związek między porządkiem $AI$ a innymi porządkami

### Fakt 6

Między porządkami stochastycznymi zachodzą następujące relacje

$$X \geq_{lr} Y \Rightarrow X \geq_{fr} Y \Rightarrow X \geq_{st} Y \Rightarrow X \geq_{icx} Y$$

### Fakt 7 (Nanda, Bhattacharjee, Alam (2007))

- $X \geq_{AI} Y \not\Rightarrow X \geq_{icx} Y$
- $X \geq_{lr} Y \not\Rightarrow X \geq_{AI} Y$

### Fakt 8

- porządek  $AI$  nie implikuje żadnego z powyższych porządków
- żaden z powyższych porządków nie implikuje porządku  $AI$

### Fakt 9 (Nanda, Bhattacharjee, Alam (2007))

$$X \geq_{AF} Y \Rightarrow X \geq_{AI} Y$$



## Porządek AI dla rozkładów dyskretnych

Dla zmiennych losowych dyskretnych  $X, Y$  o wspólnym nośniku  $\{1, 2, \dots\}$  mówimy, że  $X \geq_{AI} Y$  gdy

- dla wszystkich  $k = 1, 2, \dots$ ,  $L_X(k) \leq L_Y(k)$  lub
- dla wszystkich  $k = 2, 3, \dots$ ,  $L_X^*(k) \leq L_Y^*(k)$ .

### Uwaga

Jeżeli dyskretna zmienna losowa  $X$  ma mniejszą intensywność starzenia  $L$  lub  $L^*$ , to

- $X$  jest większa (lepiej) w porządku intensywności starzenia AI
- $X$  ma mniejszą tendencję do starzenia się

### Uwaga

Wybór jednej z funkcji  $L$  lub  $L^*$  użytej do określenia porządku intensywności starzenia w danej klasie rozkładów dyskretnych zależy od specyficznej (wygodniejszej) postaci funkcji.

# Porządek AI dla rozkładów $DMW(q, \alpha, c)$

## Charakteryzacja $DMW(q, \alpha, c)$

Jeżeli dla dyskretnej zmiennej losowej  $X$ , dla  $\alpha > 0, c \geq 1$ ,

- intensywność starzenia

$$L(k) = \frac{k^\alpha c - (k-1)^\alpha}{k^{\alpha-1} c}, \text{ dla } k = 1, 2, \dots, \text{ lub}$$

- alternatywna intensywność starzenia

$$L^*(k) = \alpha + \frac{\ln c}{\ln \frac{k}{k-1}}, \text{ dla } k = 2, 3, \dots,$$

to  $X \sim DMW(q, \alpha, c)$ , gdzie  $q = \bar{F}(1)$ ,  $0 < q < 1$ .

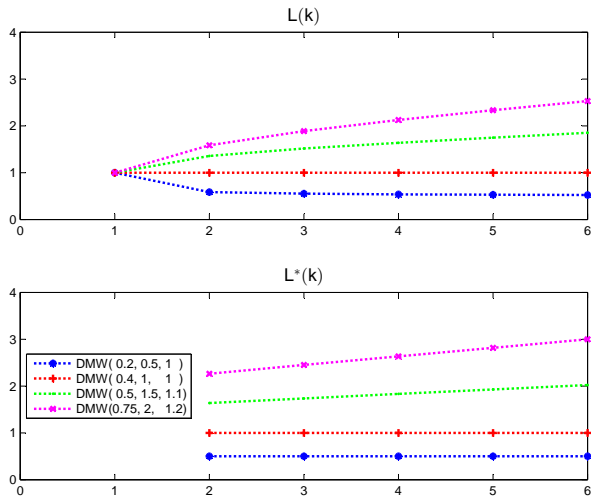
## Twierdzenie 4 (S., I. (2016))

Jeżeli  $X_i \sim DMW(q_i, \alpha_i, c_i)$  dla  $i = 1, 2$ ,  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  i  $c_1 \leq c_2$ , to

$L_{X_1}(k) \leq L_{X_2}(k)$  dla  $k = 1, 2, \dots$  oraz

$L_{X_1}^*(k) \leq L_{X_2}^*(k)$  dla  $k = 2, 3, \dots$  ( $\iff X_1 \geq_{AI} X_2$ ).

# Porządek AI dla rozkładów $DMW(q, \alpha, c)$



# Porządek AI dla rozkładów $DMW(q, \alpha, c)$

Następujące kontrprzykłady pokazują, że żaden z warunków dotyczących uporządkowania parametrów  $\alpha$  i  $c$  nie może być pominięty.

## Kontrprzykład 1

Jeżeli  $X_i \sim DMW(q_i, \alpha_i, c_i)$ ,  $i = 1, 2$  z  $\alpha_1 = 2 < \alpha_2 = 3$   
i  $c_1 = 3 > c_2 = 2$ , to  $L_{X_1}(2) = 1.83 < L_{X_2}(2) = 1.88$ ,  
ale  $L_{X_1}(11) = 7.97 > L_{X_2}(11) = 6.87$ . Stąd  $X_1 \not\prec_{AI} X_2$ .

## Kontrprzykład 2

Jeżeli  $X_i \sim DMW(q_i, \alpha_i, c_i)$ ,  $i = 1, 2$  z  $\alpha_1 = 4 > \alpha_2 = 3$   
i  $c_1 = 3 < c_2 = 4$ , to  $L_{X_1}(2) = 1.96 > L_{X_2}(2) = 1.94$ ,  
ale  $L_{X_1}(11) = 8.50 < L_{X_2}(11) = 8.93$ . Stąd  $X_1 \not\prec_{AI} X_2$ .

# Estymator $\hat{L}$

Niech

- $N$  będzie liczbą obiektów poddanych testowi rozpoczynającemu się w chwili  $t_0 = 0$
- $N_s(t_j)$  będzie liczbą obiektów, które "przeżyły" do czasu  $t_j$

$$\hat{F}(t) = \frac{N_s(t_j)}{N}$$

$$\hat{L}(t) = \frac{-t \hat{f}(t)}{\hat{F}(t) \ln \hat{F}(t)} \quad \text{dla } t_j \leq t < t_j + \Delta t_j$$

# Estymator $\hat{L}$ dla danych pogrupowanych

Dla danych pogrupowanych w klasy o długości  $\Delta t$ , jeżeli

- $N$  jest odpowiednio duże
- $t_j \leq t < t_j + \Delta t$ , gdzie  $\Delta t$  jest odpowiednio małe,

można wyznaczyć następujące estymatory

$$\hat{f}(t) = \frac{N_s(t_j) - N_s(t_j + \Delta t)}{\Delta t N}$$

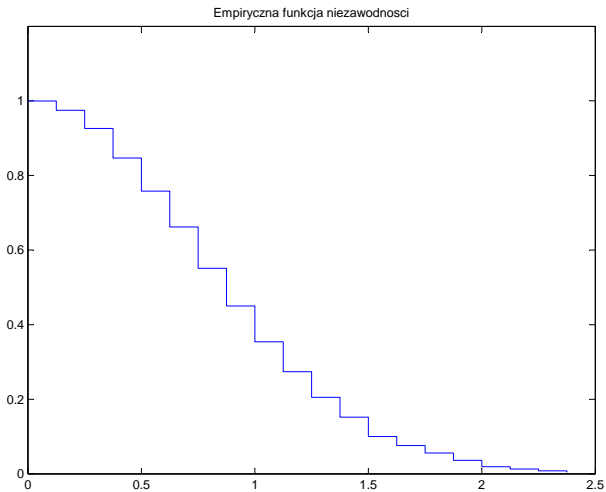
$$\hat{L}(t) = \frac{-t \hat{f}(t)}{\hat{F}(t) \ln \hat{F}(t)} = \frac{-t [N_s(t_j) - N_s(t_j + \Delta t)]}{\Delta t N_s(t_j) \ln \frac{N_s(t_j)}{N}} \quad (\text{Bhattacharjee, Nanda, Misra (2013)})$$

# Dane pogrupowane – wygenerowane

## Przykład 1

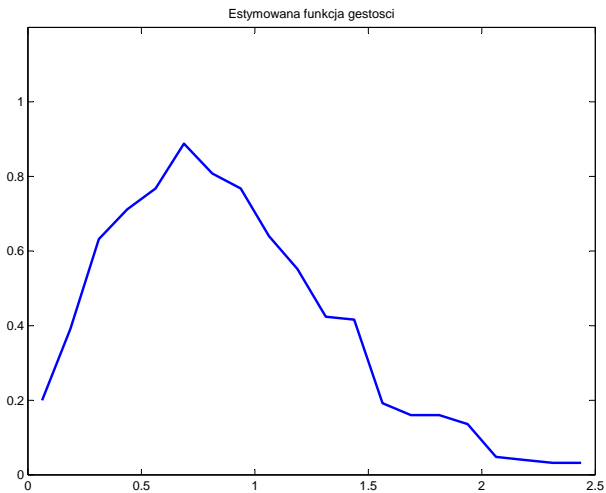
Dane wygenerowane w programie *MATLAB* przy pomocy funkcji *wblrnd* według rozkładu  $W2(2, 1)$ ,  $N = 1000$ , pogrupowane  $k = 20$ ,  $\Delta t = 0.125$ .

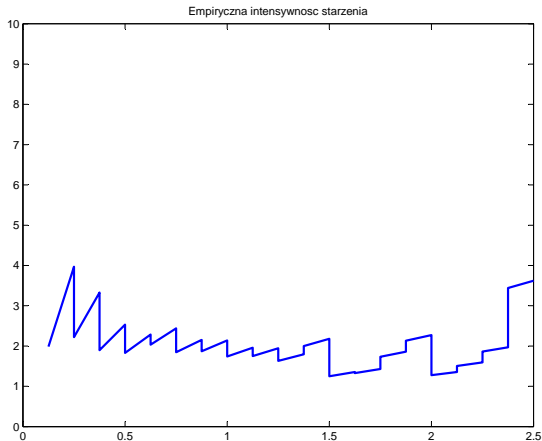
Lp.	Czas $t \in [t_j, t_j + \Delta t)$	$N_s(t_j)$	$n(t_j) = N_s(t_j) - N_s(t_j + \Delta t)$	$\frac{N_s(t_j)}{N}$	$\hat{L}(t)$
1	0.000-0.125	1000	25	1.000	-
2	0.125-0.250	975	49	0.975	15.8802 t
3	0.250-0.375	926	79	0.926	8.8774 t
4	0.375-0.500	847	89	0.847	5.0623 t
5	0.500-0.625	758	96	0.758	3.6568 t
6	0.625-0.750	662	111	0.662	3.2519 t
7	0.750-0.875	551	101	0.551	2.4606 t
8	0.875-1.000	450	96	0.450	2.1373 t
9	1.000-1.125	354	80	0.354	1.7410 t
10	1.125-1.250	274	69	0.274	1.5561 t
11	1.250-1.375	205	53	0.205	1.3051 t
12	1.375-1.500	152	52	0.152	1.4528 t
13	1.500-1.625	100	24	0.100	0.8338 t
14	1.625-1.750	76	20	0.076	0.8168 t
15	1.750-1.875	56	20	0.056	0.9912 t
16	1.875-2.000	36	17	0.036	1.1364 t
17	2.000-2.125	19	6	0.019	0.6374 t
18	2.125-2.250	13	5	0.013	0.7085 t
19	2.250-2.375	8	4	0.008	0.8284 t
20	2.375-2.500	4	4	0.004	1.4489 t



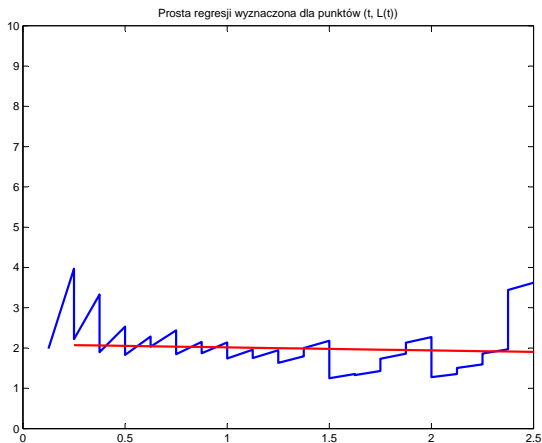


$\hat{f}$



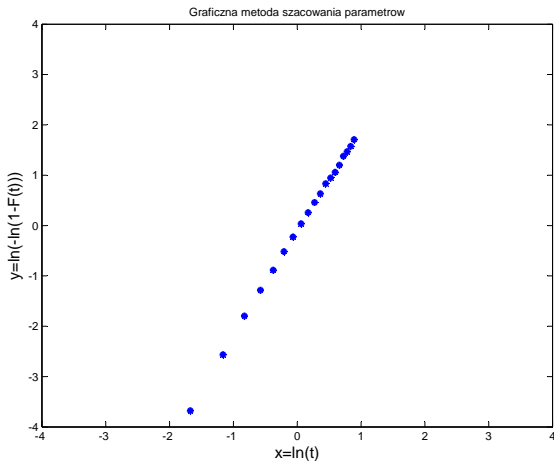


# $\hat{L}$ oraz prosta regresji wyznaczona dla punktów $(t, \hat{L}(t))$

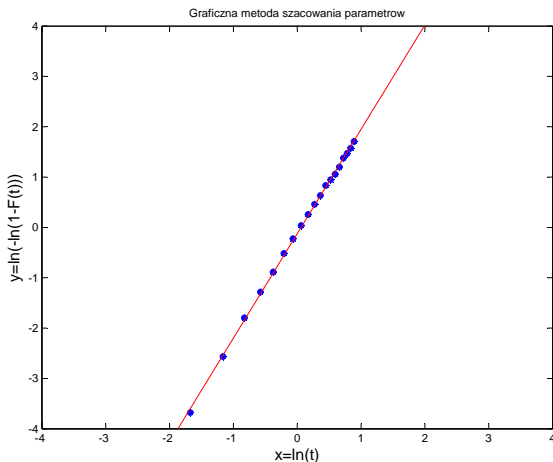


$$y = Ax + B \quad \text{prosta regresji dla punktów } (t, \hat{L}(t))$$
$$\hat{\alpha} = B = 2.0903$$

# Graficzna metoda szacowania parametrów $W2(\alpha, \lambda)$



# Graficzna metoda szacowania parametrów $W2(\alpha, \lambda)$



$$y = ax + b \quad \text{prosta regresji dla punktów } (\ln(t), \ln(-\ln(\widehat{F}(t))))$$
$$\widehat{\alpha} = b = 2.0727 \quad \widehat{\lambda} = \exp(a) = 0.8822$$

# Metoda Największej Wiarygodności

Parametry  $W2(\alpha, \lambda)$  wyznaczone w programie *Matlab* przy pomocy funkcji `wblfit` dla danych pogrupowanych

$$\hat{\alpha} = 1.8826 \quad \hat{\lambda} = 1.0390$$

## Parametry rozkładu $W2(\alpha, \lambda)$

parametry dla danych wygenerowanych	$\alpha$	$\lambda$
	2.0000	1.0000
estymatory dla danych pogrupowanych	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$
MNW	1.8826	1.0390
metoda graficzna	2.0727	0.8822
intensywność starzenia	2.0903	

## Test zgodności $\chi^2$

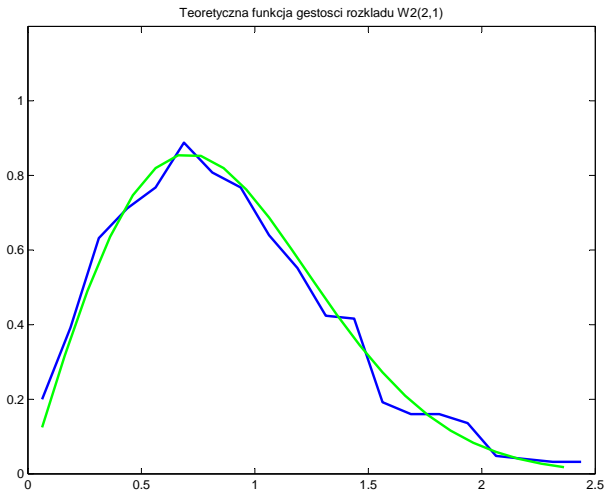
Wyliczona w programie *Matlab* przy pomocy funkcji `chi2gof`

statystyka  $\chi^2 = 10.7762$  z  $\nu = 16$  stopniami swobody  
oraz wartość  $p = 0.8231$

świadczy o tym, że na poziomie istotności  $\alpha < 0.8231$  nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności badanego rozkładu z rozkładem Weibulla.



# $f$ oraz $\hat{f}$ dla danych pogrupowanych



# Konkluzje

## Wnioski

- intensywność starzenia charakteryzuje rozkłady
- intensywność starzenia porządkuje wybrane zmienne losowe
- empiryczna intensywność starzenia pozwala rozpoznać rozkład

## Kierunki dalszych badań

- charakteryzacje rozkładów dwu- i wielowymiarowych za pomocą wektorów intensywności starzenia
- analiza intensywności starzenia na podstawie danych dwu- i wielowymiarowych
- analiza intensywności starzenia na podstawie danych uciętych

## Bibliografia

- Azlarov, T.A., Volodin, N.A. (1986). *Characterization Problem Associated with the Exponential Distribution*. Springer-Verlag. New York.
- Jiang, R., Ji, P., Xiao, X. (2003). Aging property of unimodal failure rate models. *Reliability Engineering and System Safety*, 79, 113–116.
- Roy, D., Gupta, R.P. (1992). Classifications of discrete lives. *Microelectron. Reliab.*, 32, 1459–1473.

## Bibliografia

- Iwińska, M., Szymkowiak, M. (2017). Characterizations of distributions through selected functions of reliability theory. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 46, 69–74.
- Szymkowiak, M., Iwińska, M. (2016). Characterizations of Discrete Weibull related distributions. *Statistics and Probability Letters*, 111, 41–48.