

Testowanie hipotez o strukturze macierzy kowariancyjnej w dwupoziomowym modelu wielowymiarowym

Katarzyna Filipiak

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych
Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

25.06.2014

Obserwacje wektorowe

q

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$$

Obserwacje wektorowe

q

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \sim N_q(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

Obserwacje wektorowe

q, p

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1q} \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2q} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} x_{p1} \\ x_{p2} \\ \vdots \\ x_{pq} \end{pmatrix}$$

Testowanie

$\mathbf{x}_i \sim N_q(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad \text{niezależne}$

Testowanie

$\mathbf{x}_i \sim N_q(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad \text{niezależne}$

Hipoteza

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0 \quad H_1 : \boldsymbol{\Sigma} \neq \boldsymbol{\Sigma}_0$$

Testowanie

$\mathbf{x}_i \sim N_q(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad \text{niezależne}$

Hipoteza

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0 \quad H_1 : \boldsymbol{\Sigma} \neq \boldsymbol{\Sigma}_0$$

$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ – funkcja wiarygodności próby (różniczkowalna ze względu na $\boldsymbol{\Sigma}$).

Testowanie

$\mathbf{x}_i \sim N_q(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad \text{niezależne}$

Hipoteza

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0 \quad H_1 : \boldsymbol{\Sigma} \neq \boldsymbol{\Sigma}_0$$

$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ – funkcja wiarygodności próby (różniczkowalna ze względu na $\boldsymbol{\Sigma}$).

Iloraz wiarygodności (LR)

$$\Lambda = \frac{\max_{H_0} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}{\max_{H_A} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}$$

Testowanie

$\mathbf{x}_i \sim N_q(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad \text{niezależne}$

Hipoteza

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0 \quad H_1 : \boldsymbol{\Sigma} \neq \boldsymbol{\Sigma}_0$$

$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ – funkcja wiarygodności próby (różniczkowalna ze względu na $\boldsymbol{\Sigma}$).

Iloraz wiarygodności (LR)

$$\Lambda = \frac{\max_{H_0} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}{\max_{H_A} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}$$

Statystyka testowa LR

$$-2 \ln \Lambda$$

Testowanie

$\mathbf{x}_i \sim N_q(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad \text{niezależne}$

Hipoteza

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0 \quad H_1 : \boldsymbol{\Sigma} \neq \boldsymbol{\Sigma}_0$$

$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ – funkcja wiarygodności próby (różniczkowalna ze względu na $\boldsymbol{\Sigma}$).

Iloraz wiarygodności (LR)

$$\Lambda = \frac{\max_{H_0} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}{\max_{H_A} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}$$

Statystyka testowa LR

$$-2 \ln \Lambda \underset{\text{app}}{\sim} \chi_{q(q+1)/2}^2$$

Hipotezy

$$H_0 : \Sigma = \Sigma_0 \quad H_1 : \Sigma \neq \Sigma_0$$

$$H_0 : \Sigma = \Sigma_0 \quad H_1 : \Sigma \neq \Sigma_0$$

Iloraz wiarygodności (LR)

$$\lambda = (e/p)^{-pq/2} |\Sigma_0^{-1} \mathbf{A}|^{p/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} \left[\Sigma_0^{-1} \mathbf{A} \right] \right\}$$

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^p (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})'$$

Obserwacje macierzowe

$q, \quad p$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{q1} & x_{q2} & \cdots & x_{qp} \end{pmatrix}$$

Obserwacje macierzowe

q, p

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{q1} & x_{q2} & \cdots & x_{qp} \end{pmatrix} \sim N_{q,p}(\mathbf{M}, \Sigma, \Psi)$$

Obserwacje macierzowe

q, p

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{q1} & x_{q2} & \cdots & x_{qp} \end{pmatrix} \sim N_{q,p}(\mathbf{M}, \Sigma, \Psi)$$

$$\text{vec}\mathbf{X} \sim N_{qp}(\text{vec}\mathbf{M}, \Psi \otimes \Sigma)$$

Obserwacje macierzowe

q, p

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{q1} & x_{q2} & \cdots & x_{qp} \end{pmatrix} \sim N_{q,p}(\mathbf{M}, \Sigma, \Psi)$$

$$\text{vec}\mathbf{X} \sim N_{qp}(\text{vec}\mathbf{M}, \Psi \otimes \Sigma)$$

$$\text{vec}\mathbf{X} \sim N_{qp}(\text{vec}\mathbf{M}, \Omega)$$

Obserwacje macierzowe

q, p, n

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_{111} & x_{112} & \cdots & x_{11p} \\ x_{121} & x_{122} & \cdots & x_{12p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1q1} & x_{1q2} & \cdots & x_{1qp} \end{pmatrix},$$

\vdots

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_{n11} & x_{n12} & \cdots & x_{n1p} \\ x_{n21} & x_{n22} & \cdots & x_{n2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{nq1} & x_{nq2} & \cdots & x_{nqp} \end{pmatrix}$$

Dwupoziomowe obserwacje macierzowe

$$\text{vec}\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} y_{i11} \\ y_{i21} \\ \vdots \\ \hline y_{1q1} \\ \vdots \\ \hline y_{n1p} \\ y_{n2p} \\ \dots \\ y_{nqp} \end{pmatrix}$$

Dwupoziomowe obserwacje macierzowe

$$\text{vec}\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} y_{i11} \\ y_{i21} \\ \vdots \\ \frac{y_{1q1}}{\vdots} \\ y_{n1p} \\ y_{n2p} \\ \dots \\ y_{nqp} \end{pmatrix} \sim N_{qp}(\text{vec}\mathbf{M}_i, \Omega)$$

$i = 1, 2, \dots, n,$ niezależne

Dwupoziomowe obserwacje macierzowe

$$\text{vec}\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} y_{i11} \\ y_{i21} \\ \vdots \\ \frac{y_{1q1}}{\vdots} \\ y_{n1p} \\ y_{n2p} \\ \dots \\ y_{nqp} \end{pmatrix} \sim N_{qp}(\text{vec}\mathbf{M}_i, \Omega)$$

$i = 1, 2, \dots, n,$ niezależne

$$\mathbf{X} = (\text{vec}\mathbf{X}_1 : \dots : \text{vec}\mathbf{X}_n) \sim N_{qp,n}(\mathbf{M}, \Omega, \mathbf{I}_n),$$
$$\mathbf{M} = (\text{vec}\mathbf{M}_1 : \dots : \text{vec}\mathbf{M}_n)$$

Dwupoziomowe obserwacje macierzowe

$$\text{vec}\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} y_{i11} \\ y_{i21} \\ \vdots \\ \frac{y_{1q1}}{\vdots} \\ y_{n1p} \\ y_{n2p} \\ \dots \\ y_{nqp} \end{pmatrix} \sim N_{qp}(\text{vec}\mathbf{M}_i, \Omega)$$

$i = 1, 2, \dots, n,$ niezależne

$$\mathbf{X} = (\text{vec}\mathbf{X}_1 : \dots : \text{vec}\mathbf{X}_n) \sim N_{qp,n}(\mathbf{M}, \Omega, \mathbf{I}_n),$$
$$\mathbf{M} = (\text{vec}\mathbf{M}_1 : \dots : \text{vec}\mathbf{M}_n)$$

$$\text{vec}\mathbf{X} \sim N_{qpn}(\text{vec}\mathbf{M}, \mathbf{I}_n \otimes \Omega)$$

Eksperyment

- q – liczba cech

Eksperyment

- q – liczba cech
- p – liczba punktów czasowych

Eksperyment

- q – liczba cech
- p – liczba punktów czasowych
- n – liczebność próby

Eksperyment

- q – liczba cech
- p – liczba punktów czasowych
- n – liczebność próby
- $\mathbf{X}_i, i = 1, \dots, n$ – niezależne macierze obserwacji o jednakowym rozkładzie

Dwupoziomowy model wielowymiarowy

Model

$$\mathbf{X}_i \sim N_{q,p}(\mathbf{M}, \Omega)$$

Model

$$\mathbf{X}_i \sim N_{q,p}(\mathbf{M}, \Omega)$$

- \mathbf{X}_i - macierz obserwacji

Model

$$\mathbf{X}_i \sim N_{q,p}(\mathbf{M}, \Omega)$$

- \mathbf{X}_i - macierz obserwacji
- \mathbf{M} - macierz średnich

Model

$$\mathbf{X}_i \sim N_{q,p}(\mathbf{M}, \Omega)$$

- \mathbf{X}_i - macierz obserwacji
- \mathbf{M} - macierz średnich
- Ω - macierz wariancji-kowariancji (p.d.)

Dwupoziomowy model wielowymiarowy

Model

$$\text{vec}\mathbf{X}_i \sim N_{pq}(\text{vec}\mathbf{M}, \Omega)$$

Dwupoziomowy model wielowymiarowy

Model

$$\text{vec}\mathbf{X}_i \sim N_{pq}(\text{vec}\mathbf{M}, \Omega)$$

$$\text{vec}\mathbf{X}_i \sim N_{pq}(\boldsymbol{\mu}, \Omega)$$

Dwupoziomowy model wielowymiarowy

Model

$$\text{vec}\mathbf{X}_i \sim N_{pq}(\text{vec}\mathbf{M}, \Omega)$$

$$\text{vec}\mathbf{X}_i \sim N_{pq}(\boldsymbol{\mu}, \Omega)$$

Wektor nieznanych parametrów:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \text{vech}\Omega \end{pmatrix}$$

Dwupoziomowy model wielowymiarowy

Model

$$\text{vec}\mathbf{X}_i \sim N_{pq}(\text{vec}\mathbf{M}, \Omega)$$

$$\text{vec}\mathbf{X}_i \sim N_{pq}(\boldsymbol{\mu}, \Omega)$$

Wektor nieznanych parametrów:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \text{vech}\Omega \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} pq \\ pq(pq+1)/2 \end{matrix}$$

Dwupoziomowy model wielowymiarowy

Model

$$\text{vec}\mathbf{X}_i \sim N_{pq}(\text{vec}\mathbf{M}, \Omega)$$

$$\text{vec}\mathbf{X}_i \sim N_{pq}(\boldsymbol{\mu}, \Omega)$$

Wektor nieznanych parametrów:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \text{vech}\Omega \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} pq \\ pq(pq+1)/2 \end{matrix}$$

Estymowalność Ω : $n > pq$

Hipoteza

$$H_0: \underset{pq \times pq}{\Omega} = \underset{p \times p}{\Psi} \otimes \underset{q \times q}{\Sigma}$$

Hipoteza

$$H_0: \quad \underset{pq \times pq}{\Omega} = \underset{p \times p}{\Psi} \otimes \underset{q \times q}{\Sigma}$$

Ψ - macierz wariancji-kowariancji punktów czasowych dla danej cechy (taka sama dla wszystkich cech)

Hipoteza

$$H_0: \quad \underset{pq \times pq}{\Omega} = \underset{p \times p}{\Psi} \otimes \underset{q \times q}{\Sigma}$$

- Ψ - macierz wariancji-kowariancji punktów czasowych dla danej cechy (taka sama dla wszystkich cech)
- Σ - macierz wariancji-kowariancji cech w danym punkcie czasowym (taka sama dla wszystkich punktów czasowych)

Hipoteza

$$H_0: \underset{pq \times pq}{\Omega} = \underset{p \times p}{\Psi} \otimes \underset{q \times q}{\Sigma}$$

Ψ - macierz wariancji-kowariancji punktów czasowych dla danej cechy (taka sama dla wszystkich cech)

Σ - macierz wariancji-kowariancji cech w danym punkcie czasowym (taka sama dla wszystkich punktów czasowych)

Liczba parametrów: $\frac{p(p+1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2} - 1$

Hipoteza

$$H_0: \underset{pq \times pq}{\Omega} = \underset{p \times p}{\Psi} \otimes \underset{q \times q}{\Sigma}$$

Ψ - macierz wariancji-kowariancji punktów czasowych dla danej cechy (taka sama dla wszystkich cech)

Σ - macierz wariancji-kowariancji cech w danym punkcie czasowym (taka sama dla wszystkich punktów czasowych)

Liczba parametrów: $\frac{p(p+1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2} - 1$

Dutilleul (1999), Roy & Khattree (2003), Lu & Zimmerman (2005), Roy (2007), Srivastava et al. (2008), Werner et al. (2008)

Hipoteza (Roy, Khattree, 2005a, b)

$$H_0 : \begin{matrix} \Omega & = & \Psi & \otimes & \Sigma \\ pq \times pq & & p \times p & & q \times q \end{matrix}$$

Hipoteza (Roy, Khattree, 2005a, b)

$$H_0 : \underset{pq \times pq}{\Omega} = \underset{p \times p}{\Psi} \otimes \underset{q \times q}{\Sigma}$$

- Ψ - struktura kompletnej symetrii
(compound symmetry – CS)

Hipoteza (Roy, Khattree, 2005a, b)

$$H_0 : \underset{pq \times pq}{\Omega} = \underset{p \times p}{\Psi} \otimes \underset{q \times q}{\Sigma}$$

- Ψ - struktura kompletnej symetrii
(compound symmetry – CS)

$$\Psi = (1 - \rho)\mathbf{I}_p + \rho\mathbf{1}_p\mathbf{1}_p'$$

Hipoteza (Roy, Khattree, 2005a, b)

$$H_0 : \underset{pq \times pq}{\Omega} = \underset{p \times p}{\Psi} \otimes \underset{q \times q}{\Sigma}$$

- Ψ - struktura kompletnej symetrii
(compound symmetry – CS)

$$\Psi = (1 - \rho)\mathbf{I}_p + \rho\mathbf{1}_p\mathbf{1}_p' \quad \left(-\frac{1}{p-1} < \rho < 1\right)$$

Hipoteza (Roy, Khattree, 2005a, b)

$$H_0: \underset{pq \times pq}{\Omega} = \underset{p \times p}{\Psi} \otimes \underset{q \times q}{\Sigma}$$

- Ψ - struktura kompletnej symetrii
(compound symmetry – CS)

$$\Psi = (1 - \rho)\mathbf{I}_p + \rho\mathbf{1}_p\mathbf{1}_p' \quad \left(-\frac{1}{p-1} < \rho < 1\right)$$

Liczba parametrów: $1 + \frac{q(q+1)}{2}$

Hipotezy

$H_0 : \Omega = \Psi \otimes \Sigma, \Psi \text{ CS}$ $H_A : \Omega \text{ dowolna macierz p.d.}$

Hipotezy

$H_0 : \Omega = \Psi \otimes \Sigma, \Psi \text{ CS}$ $H_A : \Omega \text{ dowolna macierz p.d.}$

Stopnie swobody

$$v = \frac{pq(pq+1)}{2} - \frac{q(q+1)}{2} - 1$$

Test największej wiarygodności (LRT)

- $\mathbf{X} = [\text{vec}\mathbf{X}_1, \text{vec}\mathbf{X}_2, \dots, \text{vec}\mathbf{X}_n] \in \mathbb{R}^{pq, n}$ – macierz danych
- $\ln L(\mu, \Omega; \mathbf{X})$ – logarytm funkcji wiarygodności (różniczkowalna ze względu na wszystkie składowe wektora θ dla każdego \mathbf{X}).

Test największej wiarygodności (LRT)

- $\mathbf{X} = [\text{vec}\mathbf{X}_1, \text{vec}\mathbf{X}_2, \dots, \text{vec}\mathbf{X}_n] \in \mathbb{R}^{pq, n}$ – macierz danych
- $\ln L(\mu, \Omega; \mathbf{X})$ – logarytm funkcji wiarygodności (różniczkowalna ze względu na wszystkie składowe wektora θ dla każdego \mathbf{X}).

Iloraz wiarygodności (LR)

$$\Lambda = \frac{\max_{H_0} L}{\max_{H_A} L}$$

Test największej wiarygodności (LRT)

- $\mathbf{X} = [\text{vec}\mathbf{X}_1, \text{vec}\mathbf{X}_2, \dots, \text{vec}\mathbf{X}_n] \in \mathbb{R}^{pq, n}$ – macierz danych
- $\ln L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Omega}; \mathbf{X})$ – logarytm funkcji wiarygodności (różniczkowalna ze względu na wszystkie składowe wektora $\boldsymbol{\theta}$ dla każdego \mathbf{X}).

Iloraz wiarygodności (LR)

$$\Lambda = \frac{\max_{H_0} L}{\max_{H_A} L}$$

Statystyka testowa LR

$$-2\ln \Lambda$$

Test największej wiarygodności (LRT)

- $\mathbf{X} = [\text{vec}\mathbf{X}_1, \text{vec}\mathbf{X}_2, \dots, \text{vec}\mathbf{X}_n] \in \mathbb{R}^{pq, n}$ – macierz danych
- $\ln L(\mu, \Omega; \mathbf{X})$ – logarytm funkcji wiarygodności (różniczkowalna ze względu na wszystkie składowe wektora θ dla każdego \mathbf{X}).

Iloraz wiarygodności (LR)

$$\Lambda = \frac{\max_{H_0} L}{\max_{H_A} L}$$

Statystyka testowa LR

$$-2 \ln \Lambda \underset{\text{app}}{\sim} \chi_v^2$$

Hipotezy

$H_0 : \Omega = \Psi \otimes \Sigma, \Psi \text{ CS}$ $H_A : \Omega \text{ dowolna macierz p.d.}$

Hipotezy

$H_0 : \Omega = \Psi \otimes \Sigma, \Psi \text{ CS}$ $H_A : \Omega \text{ dowolna macierz p.d.}$

Iloraz wiarygodności (LR)

$$\Lambda = \frac{|\hat{\Psi}|^{-nq/2} |\hat{\Sigma}|^{-np/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} \left[(\hat{\Psi}^{-1} \otimes \hat{\Sigma}^{-1}) \mathbf{S} \right] \right\}}{|\mathbf{S}|^{-n/2} n^{-npq/2} \exp(-npq/2)}$$

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{n} \mathbf{S}$$

Test "Rao score"

Rao score (RS)

$$\mathbf{s}'(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathcal{F}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

Test "Rao score"

Rao score (RS)

$$\mathbf{s}'(\hat{\theta}) \mathcal{F}^{-1}(\hat{\theta}) \mathbf{s}(\hat{\theta})$$

- $\hat{\theta}$ – estymator największej wiarygodności θ

Test "Rao score"

Rao score (RS)

$$\mathbf{s}'(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathcal{F}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

- $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ – estymator największej wiarygodności $\boldsymbol{\theta}$
- $\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{s}'_1(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{s}'_2(\boldsymbol{\theta}))' = \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \text{vec}' \boldsymbol{\mu}}, \frac{\partial \ln L}{\partial \text{vech}' \boldsymbol{\Omega}} \right)'$ – "score" wektor

Test "Rao score"

Rao score (RS)

$$\mathbf{s}'(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathcal{F}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

- $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ – estymator największej wiarygodności $\boldsymbol{\theta}$
- $\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{s}'_1(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{s}'_2(\boldsymbol{\theta}))' = \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \text{vec}' \boldsymbol{\mu}}, \frac{\partial \ln L}{\partial \text{vech}' \boldsymbol{\Omega}} \right)'$ – "score" wektor
- $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}) = -\text{E} \left[\frac{\partial \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \right]$ – macierz informacji Fishera (nieosobliwa)

Test "Rao score"

Rao score (RS)

$$\mathbf{s}'(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathcal{F}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

- $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ – estymator największej wiarygodności $\boldsymbol{\theta}$
- $\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{s}'_1(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{s}'_2(\boldsymbol{\theta}))' = \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \text{vec}' \boldsymbol{\mu}}, \frac{\partial \ln L}{\partial \text{vech}' \boldsymbol{\Omega}} \right)'$ – "score" wektor
- $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}) = -\text{E} \left[\frac{\partial \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \right]$ – macierz informacji Fishera (nieosobliwa)

Statystyka testowa RS

$$\mathbf{s}'(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathcal{F}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \underset{\text{app}}{\sim} \chi^2_v$$

Hipotezy

$H_0 : \Omega = \Psi \otimes \Sigma, \Psi \text{ CS}$ $H_A : \Omega \text{ dowolna macierz p.d.}$

Hipotezy

$$H_0 : \Omega = \Psi \otimes \Sigma, \quad \Psi \text{ CS} \quad H_A : \Omega \text{ dowolna macierz p.d.}$$

Statystyka testowa RS

$$\begin{aligned} \text{RS} &= \frac{nqp}{2} - \text{tr} \left[(\hat{\Psi}^{-1} \otimes \hat{\Sigma}^{-1}) \mathbf{X} \mathbf{Q}_{1_n} \mathbf{X}' \right] + \\ &+ \frac{1}{2n} \text{tr} \left[(\hat{\Psi}^{-1} \otimes \hat{\Sigma}^{-1}) \mathbf{X} \mathbf{Q}_{1_n} \mathbf{X}' (\hat{\Psi}^{-1} \otimes \hat{\Sigma}^{-1}) \mathbf{X} \mathbf{Q}_{1_n} \mathbf{X}' \right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_{1_n} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n'$$

Symulacje, $q = 3$, $\alpha = 0.01$

$p \rightarrow$		3		4		5		7	
n	$\rho \downarrow$	$E_\alpha(\text{LRT})$	$E_\alpha(\text{RST})$	$E_\alpha(\text{LRT})$	$E_\alpha(\text{RST})$	$E_\alpha(\text{LRT})$	$E_\alpha(\text{RST})$	$E_\alpha(\text{LRT})$	$E_\alpha(\text{RST})$
10	-0.4	0.926	0.028						
	-0.2	0.915	0.029						
	-0.1	0.923	0.022						
	0.3	0.914	0.019						
	0.5	0.911	0.017						
	0.7	0.912	0.019						
	0.9	0.927	0.022						
15	-0.4	0.375	0.021						
	-0.2	0.386	0.015	0.883	0.019				
	-0.1	0.360	0.015	0.905	0.020				
	0.3	0.347	0.019	0.886	0.030				
	0.5	0.350	0.015	0.888	0.026				
	0.7	0.365	0.014	0.876	0.032				
	0.9	0.373	0.009	0.881	0.020				
20	-0.4	0.189	0.011						
	-0.2	0.178	0.013	0.473	0.015	0.897	0.023		
	-0.1	0.178	0.010	0.468	0.012	0.894	0.020		
	0.3	0.168	0.020	0.501	0.015	0.888	0.020		
	0.5	0.192	0.018	0.466	0.011	0.884	0.021		
	0.7	0.190	0.022	0.506	0.016	0.909	0.027		
	0.9	0.194	0.017	0.488	0.020	0.916	0.021		

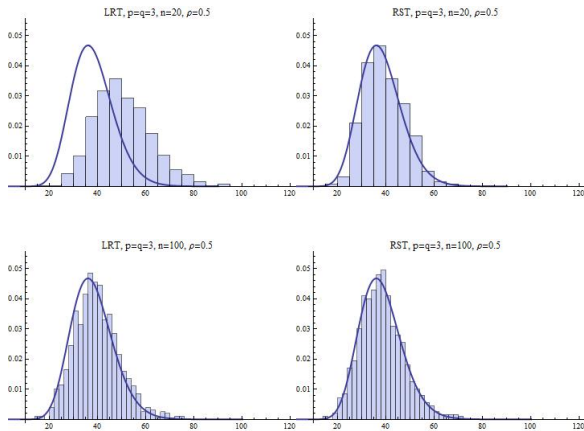
Symulacje, $q = 3$, $\alpha = 0.01$

$p \rightarrow$		3		4		5		7	
n	$\rho \downarrow$	$E_\alpha(\text{LRT})$	$E_\alpha(\text{RST})$	$E_\alpha(\text{LRT})$	$E_\alpha(\text{RST})$	$E_\alpha(\text{LRT})$	$E_\alpha(\text{RST})$	$E_\alpha(\text{LRT})$	$E_\alpha(\text{RST})$
25	-0.4	0.090	0.008						
	-0.2	0.092	0.016	0.288	0.008	0.640	0.034		
	-0.1	0.091	0.020	0.263	0.013	0.653	0.022	1.000	0.032
	0.3	0.093	0.010	0.301	0.018	0.599	0.023	0.999	0.027
	0.5	0.102	0.009	0.289	0.012	0.650	0.030	0.999	0.023
	0.7	0.114	0.014	0.287	0.009	0.620	0.034	1.000	0.028
	0.9	0.105	0.017	0.286	0.009	0.653	0.024	0.999	0.036
30	-0.4	0.068	0.015						
	-0.2	0.078	0.029	0.174	0.014	0.423	0.021		
	-0.1	0.077	0.012	0.181	0.016	0.435	0.022	0.971	0.030
	0.3	0.081	0.019	0.195	0.025	0.415	0.015	0.965	0.026
	0.5	0.074	0.013	0.170	0.013	0.402	0.018	0.964	0.027
	0.7	0.070	0.010	0.200	0.018	0.403	0.013	0.967	0.028
	0.9	0.065	0.019	0.197	0.020	0.422	0.021	0.969	0.023
50	-0.4	0.036	0.013						
	-0.2	0.028	0.008	0.055	0.012	0.124	0.015		
	-0.1	0.036	0.015	0.076	0.014	0.119	0.012	0.466	0.020
	0.3	0.031	0.017	0.064	0.015	0.125	0.013	0.455	0.013
	0.5	0.034	0.017	0.061	0.018	0.126	0.015	0.434	0.023
	0.7	0.035	0.013	0.063	0.014	0.110	0.011	0.441	0.014
	0.9	0.038	0.009	0.073	0.014	0.122	0.021	0.451	0.022

Symulacje, $q = 3$, $\alpha = 0.01$

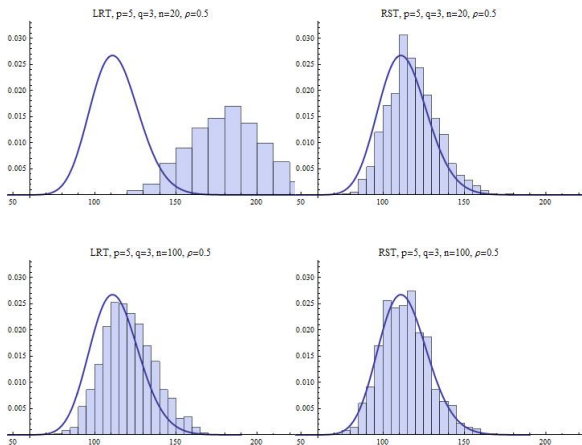
$p \rightarrow$		3		4		5		7	
n	$\rho \downarrow$	$E_{\alpha}(\text{LRT})$	$E_{\alpha}(\text{RST})$	$E_{\alpha}(\text{LRT})$	$E_{\alpha}(\text{RST})$	$E_{\alpha}(\text{LRT})$	$E_{\alpha}(\text{RST})$	$E_{\alpha}(\text{LRT})$	$E_{\alpha}(\text{RST})$
75	-0.4	0.018	0.011						
	-0.2	0.020	0.007	0.033	0.015	0.049	0.010		
	-0.1	0.026	0.014	0.042	0.016	0.046	0.012	0.169	0.017
	0.3	0.024	0.010	0.041	0.009	0.061	0.014	0.183	0.018
	0.5	0.025	0.011	0.034	0.009	0.049	0.011	0.185	0.014
	0.7	0.019	0.009	0.047	0.013	0.041	0.012	0.181	0.021
	0.9	0.018	0.011	0.029	0.010	0.057	0.006	0.178	0.011
100	-0.4	0.015	0.009						
	-0.2	0.020	0.012	0.031	0.010	0.052	0.015		
	-0.1	0.017	0.010	0.024	0.010	0.037	0.012	0.094	0.016
	0.3	0.025	0.015	0.028	0.010	0.039	0.011	0.087	0.016
	0.5	0.021	0.011	0.031	0.012	0.038	0.011	0.097	0.015
	0.7	0.020	0.013	0.027	0.009	0.041	0.012	0.098	0.012
	0.9	0.022	0.018	0.021	0.010	0.031	0.007	0.093	0.013

Symulacje, $p = q = 3$



Empiryczne histogramy wraz z granicznym rozkładem χ^2
dla statystyk LRT i RST dla $n = 20$ i $n = 100$

Symulacje, $p = 5$, $q = 3$



Empiryczne histogramy wraz z granicznym rozkładem χ^2
dla statystyk LRT i RST dla $n = 20$ i $n = 100$

Symulacje, $p = q = 3$

n	$Q_{LRT}(90)$	$Q_{LRT}(95)$	$Q_{LRT}(99)$	$Q_{RST}(90)$	$Q_{RST}(95)$	$Q_{RST}(99)$
4	—	—	—	58.129	62.145	72.371
6	—	—	—	54.757	58.854	67.804
8	—	—	—	53.111	57.239	66.101
9	—	—	—	52.586	56.538	65.284
10	130.796	145.314	179.082	52.282	56.316	64.384
15	75.436	81.591	93.471	51.235	55.166	63.470
20	66.125	71.288	81.782	50.911	54.825	62.949
25	61.662	66.331	75.751	50.417	54.323	62.384
30	58.943	63.477	72.804	50.311	54.206	62.077
40	56.170	60.634	69.469	50.146	54.017	62.064
50	54.594	58.963	67.562	49.884	53.758	61.784
75	52.919	57.021	65.368	49.943	53.764	61.663
100	51.877	55.887	63.965	49.680	53.487	61.332
∞	49.513	53.384	61.162	49.513	53.384	61.162

Empiryczne 90, 95 i 99 percentyle rozkładu statystyk LRT i RST przy założeniu prawdziwości H_0 bazujące na 50.000 symulacji

Symulacje, $p = 5$, $q = 3$

n	$Q_{LRT}(90)$	$Q_{LRT}(95)$	$Q_{LRT}(99)$	$Q_{RST}(90)$	$Q_{RST}(95)$	$Q_{RST}(99)$
4	—	—	—	164.552	173.345	192.074
6	—	—	—	152.159	160.008	177.477
8	—	—	—	146.907	154.463	170.651
10	—	—	—	144.000	151.167	166.167
16	—	—	—	139.518	146.417	160.678
20	217.668	228.508	249.130	138.208	145.010	158.620
25	187.627	196.792	213.943	136.776	143.469	156.313
30	173.893	182.009	197.968	136.086	142.544	156.164
40	160.080	167.424	182.439	135.062	141.318	154.426
50	153.423	160.488	174.637	134.749	141.191	153.501
75	145.744	152.476	166.107	134.158	140.455	153.098
100	141.853	148.400	161.211	133.821	139.968	151.560
∞	132.643	138.811	150.882	132.643	138.811	150.882

Empiryczne 90, 95 i 99 percentyle rozkładu statystyk LRT i RST przy założeniu prawdziwości H_0 bazujące na 50,000 symulacji

Symulacje, $p = 15$, $q = 3$

n	$Q_{LRT}(90)$	$Q_{LRT}(95)$	$Q_{LRT}(99)$	$Q_{RST}(90)$	$Q_{RST}(95)$	$Q_{RST}(99)$
4	—	—	—	1424.353	1456.085	1526.153
6	—	—	—	1291.374	1317.806	1373.995
8	—	—	—	1234.580	1259.409	1310.396
10	—	—	—	1202.327	1223.810	1270.746
20	—	—	—	1141.282	1160.689	1200.467
25	—	—	—	1130.055	1148.944	1185.988
30	—	—	—	1122.566	1141.412	1178.734
40	—	—	—	1113.463	1131.709	1166.684
50	1923.683	1958.573	2025.674	1108.416	1126.733	1162.987
70	1487.144	1510.817	1556.585	1101.074	1118.736	1152.130
100	1321.451	1342.617	1383.300	1097.277	1115.440	1149.140
150	1226.979	1246.316	1283.555	1093.220	1110.500	1142.910
∞	1086.521	1103.702	1136.416	1086.521	1103.702	1136.416

Empiryczne 90, 95 i 99 percentyle rozkładu statystyk LRT i RST przy założeniu prawdziwości H_0 bazujące na 50,000 symulacji

Symulacje, $q = 3$

$p \rightarrow$ $n \downarrow$	2	3	4	5	7	10	15
4	6.029	17.401	21.604	24.056	27.443	29.664	30.817
8	5.227 (123.334)	7.267	9.561	10.817	12.075	13.006	13.627
12	3.138 (51.885)	4.548 (84.412)	5.980	6.730	7.780	8.369	8.699
20	2.236 (25.475)	2.824 (33.551)	3.440 (45.287)	4.195 (64.101)	4.521	4.876	5.040
30	1.272 (15.557) (11.242)	1.612 (19.046) (13.445)	2.480 (24.582) (16.971)	2.596 (31.099) (20.685)	3.010 (49.232) (30.340)	3.244 (52.197)	3.317
50	0.812 (8.398)	0.749 (10.262)	1.274 (13.096)	1.588 (15.666)	1.700 (22.008)	1.868 (34.694)	2.015 (77.050)
80	0.128 (4.728)	0.711 (6.467)	0.920 (7.571)	1.092 (9.321)	1.110 (12.351)	1.251 (17.913)	1.249 (29.889)
100	0.142 (4.031)	0.337 (4.775)	0.735 (6.045)	0.888 (6.943)	0.952 (9.527)	0.916 (13.494)	0.990 (21.622)

Błędy procentowe pomiędzy statystykami RST (*LRT*) a jej rozkładem empirycznym (90-ty percentyl)

Symulacje – moc testów

$p \rightarrow$ $n \downarrow$	3		4		5		7	
	LRT	RST	LRT	RST	LRT	RST	LRT	RST
4	—	0.022	—	0.021	—	0.018	—	0.014
6	—	0.044	—	0.034	—	0.028	—	0.021
8	—	0.067	—	0.053	—	0.037	—	0.027
10	0.020	0.097	—	0.078	—	0.055	—	0.037
15	0.134	0.229	0.058	0.174	—	0.117	—	0.070
20	0.316	0.397	0.205	0.330	0.099	0.228	—	0.130
25	0.536	0.583	0.372	0.479	0.226	0.346	0.073	0.209
30	0.713	0.750	0.580	0.662	0.391	0.504	0.158	0.295
50	0.985	0.989	0.961	0.976	0.887	0.927	0.682	0.773
75	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.999	0.973	0.986
100	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000

Moc empiryczna testów LRT and RST dla różnych wartości n i p dla $\alpha = 0.01$ oparta na 50,000 symulacji

Dane stomatologiczne (Timm, 1980)

$n = 9$ pacjentów

$q = 3$ cechy

$p = 3$ terminy

Dane stomatologiczne (Timm, 1980)

$n = 9$ pacjentów

$q = 3$ cechy

$p = 3$ terminy

q	v	LRT (END p -value)	RST (END p -value)	LRT (χ_v^2 p -value)	RST (χ_v^2 p -value)
1,2,3	38	—	54.8215 ((0.05; 0.1))	—	54.8215 (0.038)
1,2	17	27.0035 (> 0.1)	22.1995 (> 0.1)	27.0035 (0.058)	22.1995 (0.177)
1,3	17	40.4858 (> 0.1)	23.3546 (> 0.1)	40.4858 (0.001)	23.3546 (0.138)

Wyliczone wartości statystyk LRT i RST wraz z odpowiadającymi p -values oraz p -values granicznego rozkładu χ^2

Percentyle, $p = q = 3$, $df = 38$

RST = 54.8215

n	$Q_{LRT}(90)$	$Q_{LRT}(95)$	$Q_{LRT}(99)$	$Q_{RST}(90)$	$Q_{RST}(95)$	$Q_{RST}(99)$
4	—	—	—	58.129	62.145	72.371
6	—	—	—	54.757	58.854	67.804
8	—	—	—	53.111	57.239	66.101
9	—	—	—	52.586	56.538	65.284
10	130.796	145.314	179.082	52.282	56.316	64.384
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
100	51.877	55.887	63.965	49.680	53.487	61.332
∞	49.513	53.384	61.162	49.513	53.384	61.162

Percentyle, $p = q = 3$, $df = 38$

RST = 54.8215

n	$Q_{LRT}(90)$	$Q_{LRT}(95)$	$Q_{LRT}(99)$	$Q_{RST}(90)$	$Q_{RST}(95)$	$Q_{RST}(99)$
4	—	—	—	58.129	62.145	72.371
6	—	—	—	54.757	58.854	67.804
8	—	—	—	53.111	57.239	66.101
9	—	—	—	52.586	56.538	65.284
10	130.796	145.314	179.082	52.282	56.316	64.384
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
100	51.877	55.887	63.965	49.680	53.487	61.332
∞	49.513	53.384	61.162	49.513	53.384	61.162

$0.05 < \text{END } p\text{-value} < 0.10$

Percentyle, $p = q = 3$, $df = 38$

RST = 54.8215

n	$Q_{LRT}(90)$	$Q_{LRT}(95)$	$Q_{LRT}(99)$	$Q_{RST}(90)$	$Q_{RST}(95)$	$Q_{RST}(99)$
4	—	—	—	58.129	62.145	72.371
6	—	—	—	54.757	58.854	67.804
8	—	—	—	53.111	57.239	66.101
9	—	—	—	52.586	56.538	65.284
10	130.796	145.314	179.082	52.282	56.316	64.384
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
100	51.877	55.887	63.965	49.680	53.487	61.332
∞	49.513	53.384	61.162	49.513	53.384	61.162

$0.05 < \text{END } p\text{-value} < 0.10$

$0.01 < \chi_{38}^2 p\text{-value} = 0.038 < 0.05$

Percentyle, $p = 3$, $q = 2$, $df = 17$

RST = 22.1995

n	$Q_{LRT}(90)$	$Q_{LRT}(95)$	$Q_{LRT}(99)$	$Q_{RST}(90)$	$Q_{RST}(95)$	$Q_{RST}(99)$
3	—	—	—	30.226	33.014	38.141
4	—	—	—	28.222	31.197	37.677
6	—	—	—	26.744	29.726	36.330
8	51.187	57.646	71.693	26.099	29.027	35.503
9	44.554	49.968	61.484	25.984	28.890	35.125
10	40.813	45.645	56.050	25.780	28.654	34.963
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	25.671	28.556	34.717	24.786	27.554	33.424
∞	24.769	27.587	33.409	24.769	27.587	33.409

Percentyle, $p = 3$, $q = 2$, $df = 17$

RST = 22.1995

n	$Q_{LRT}(90)$	$Q_{LRT}(95)$	$Q_{LRT}(99)$	$Q_{RST}(90)$	$Q_{RST}(95)$	$Q_{RST}(99)$
3	—	—	—	30.226	33.014	38.141
4	—	—	—	28.222	31.197	37.677
6	—	—	—	26.744	29.726	36.330
8	51.187	57.646	71.693	26.099	29.027	35.503
9	44.554	49.968	61.484	25.984	28.890	35.125
10	40.813	45.645	56.050	25.780	28.654	34.963
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	25.671	28.556	34.717	24.786	27.554	33.424
∞	24.769	27.587	33.409	24.769	27.587	33.409

END p -value > 0.10

Percentyle, $p = 3$, $q = 2$, $df = 17$

RST = 22.1995

n	$Q_{LRT}(90)$	$Q_{LRT}(95)$	$Q_{LRT}(99)$	$Q_{RST}(90)$	$Q_{RST}(95)$	$Q_{RST}(99)$
3	—	—	—	30.226	33.014	38.141
4	—	—	—	28.222	31.197	37.677
6	—	—	—	26.744	29.726	36.330
8	51.187	57.646	71.693	26.099	29.027	35.503
9	44.554	49.968	61.484	25.984	28.890	35.125
10	40.813	45.645	56.050	25.780	28.654	34.963
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	25.671	28.556	34.717	24.786	27.554	33.424
∞	24.769	27.587	33.409	24.769	27.587	33.409

END p -value > 0.10

χ_{17}^2 p -value = 0.177 > 0.10

Percentyle, $p = 3$, $q = 2$, $df = 17$

LRT = 27.0035

n	$Q_{LRT}(90)$	$Q_{LRT}(95)$	$Q_{LRT}(99)$	$Q_{RST}(90)$	$Q_{RST}(95)$	$Q_{RST}(99)$
3	—	—	—	30.226	33.014	38.141
4	—	—	—	28.222	31.197	37.677
6	—	—	—	26.744	29.726	36.330
8	51.187	57.646	71.693	26.099	29.027	35.503
9	44.554	49.968	61.484	25.984	28.890	35.125
10	40.813	45.645	56.050	25.780	28.654	34.963
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	25.671	28.556	34.717	24.786	27.554	33.424
∞	24.769	27.587	33.409	24.769	27.587	33.409

Percentyle, $p = 3$, $q = 2$, $df = 17$

$$\text{LRT} = 27.0035$$

n	$Q_{\text{LRT}}(90)$	$Q_{\text{LRT}}(95)$	$Q_{\text{LRT}}(99)$	$Q_{\text{RST}}(90)$	$Q_{\text{RST}}(95)$	$Q_{\text{RST}}(99)$
3	—	—	—	30.226	33.014	38.141
4	—	—	—	28.222	31.197	37.677
6	—	—	—	26.744	29.726	36.330
8	51.187	57.646	71.693	26.099	29.027	35.503
9	44.554	49.968	61.484	25.984	28.890	35.125
10	40.813	45.645	56.050	25.780	28.654	34.963
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
100	25.671	28.556	34.717	24.786	27.554	33.424
∞	24.769	27.587	33.409	24.769	27.587	33.409

END $p\text{-value} > 0.10$

Percentyle, $p = 3$, $q = 2$, $df = 17$

LRT = 27.0035

n	$Q_{LRT}(90)$	$Q_{LRT}(95)$	$Q_{LRT}(99)$	$Q_{RST}(90)$	$Q_{RST}(95)$	$Q_{RST}(99)$
3	—	—	—	30.226	33.014	38.141
4	—	—	—	28.222	31.197	37.677
6	—	—	—	26.744	29.726	36.330
8	51.187	57.646	71.693	26.099	29.027	35.503
9	44.554	49.968	61.484	25.984	28.890	35.125
10	40.813	45.645	56.050	25.780	28.654	34.963
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
100	25.671	28.556	34.717	24.786	27.554	33.424
∞	24.769	27.587	33.409	24.769	27.587	33.409

END p -value > 0.10

$0.05 < \chi_{17}^2$ p -value = 0.058 < 0.10

Dane mineralne (Johnson & Wichern, 2007)

$n = 25$ starszych kobiet

$q = 3$ kości: promieniowa, ramieniowa, łokciowa

$p = 2$ strony: prawa, lewa

Dane mineralne (Johnson & Wichern, 2007)

$n = 25$ starszych kobiet

$q = 3$ kości: promieniowa, ramieniowa, łokciowa

$p = 2$ strony: prawa, lewa

q	v	LRT (END p -value)	RST (END p -value)	LRT (χ_v^2 p -value)	RST (χ_v^2 p -value)
1,2,3	14	22.7675 (> 0.1)	17.7937 (> 0.1)	22.7675 (0.064)	17.7937 (0.216)

Wyliczone wartości statystyk LRT i RST wraz z odpowiadającymi p -values oraz p -values granicznego rozkładu χ^2

Dane Aids (Thompson, 1991)

$n = 27$ pacjentów

$q = 3$ cechy: TMHR scores, Karofsky scores, T-4 cell counts

$p = 3$ terminy: początkowy, po 90 dniach, po 180 dniach

Dane Aids (Thompson, 1991)

$n = 27$ pacjentów

$q = 3$ cechy: TMHR scores, Karofsky scores, T-4 cell counts

$p = 3$ terminy: początkowy, po 90 dniach, po 180 dniach

q	v	LRT (END p -value)	RST (END p -value)	LRT (χ_v^2 p -value)	RST (χ_v^2 p -value)
1,2,3	38	134.8540 (< 0.01)	114.6980 (< 0.01)	134.8540 (< 0.01)	114.6980 (< 0.01)
1,2	17	80.4133 (< 0.01)	61.9511 (< 0.01)	80.4133 (< 0.01)	61.9511 (< 0.01)

Wyliczone wartości statystyk LRT i RST wraz z odpowiadającymi p -values oraz p -values granicznego rozkładu χ^2

- Statystyka RST zależy tylko od macierzy danych \mathbf{X} , estymatora Ψ wyrażonego explicite za pomocą ρ oraz estymatora macierzy Σ wymiaru $q \times q$. Dlatego do wyliczenia statystyki RST potrzebnych jest minimum $q + 1$ prób (liczba ta nie zależy od p), podczas gdy do wyznaczenia statystyki LRT niezbędnych jest $pq + 1$ prób (liczba ta może szybko rosnąć wraz ze wzrostem liczby badanych punktów czasowych p). Stąd możemy wnioskować, że statystyka RST jest znacznie lepsza od LRT.

- Z przedstawionych tabel i wykresów można zauważyć, że dla małych i średnich prób rozkład empiryczny statystyki RST jest znacznie bliższy granicznemu rozkładowi χ^2 niż rozkład empiryczny statystyki LRT. Stąd wniosek, że empiryczny rozkład statystyki RST zachowuje się znacznie lepiej niż empiryczny rozkład statystyki LRT dla zarówno małych jak i średnich prób. Dlatego dla prawdziwych danych eksperymentalnych rozważniej jest stosować empiryczny rozkład statystyki RST.

- Z przykładów widać, że wnioskowanie różni się w większości przypadków jeśli użyjemy rozkładu empirycznego zamiast granicznego rozkładu χ^2 , który jest bardzo konserwatywny, zwłaszcza gdy wartość statystyki testowej znajduje się blisko wartości krytycznej rozkładu χ^2 . Zauważmy jednak, że decyzja pozostaje taka sama jeśli użyjemy rozkładów empirycznych statystyk RST i LRT. Najważniejsze jednak jest to, że decyzja podjęta na bazie empirycznego rozkładu statystyki RST jest w większości przypadków taka sama jak dla rozkładu granicznego. Poczynione obserwacje sugerują aby przeprowadzać wnioskowanie na bazie statystyki RST zamiast LRT, zwłaszcza dla małych i średnich prób.

Podstawowa literatura

- Dutilleul, P. (1999). The MLE algorithm for the matrix normal distribution. *J. Stat. Comput. Simul.* 64(2), 105–123.
- Filipiak, K., Klein, D., Roy, A. (2014). Score test for a separable covariance structure with the first component as compound symmetric correlation matrix. *Submitted*.
- Johnson, R. A., Wichern, D. W. (2007). *Applied Multivariate Statistical Analysis* (6th Ed.). Pearson Prentice Hall, New Jersey.
- Krzyśko, M. (2000). *Wielowymiarowa analiza statystyczna*. Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu.
- Lu, N., Zimmerman, D. (2005). The likelihood ratio test for a separable covariance matrix. *Statist. Probab. Lett.* 73, 449–457.
- Rao, C. R. (2005). Score test: Historical review and recent developments. *Advances in Ranking and Selection, Multiple Comparisons, and Reliability*, 3–20.

Podstawowa literatura

- Roy, A., Khattree, R. (2003). Tests for mean and covariance structures relevant in repeated measures based discriminant analysis. *J. Appl. Statist. Sci.* 12(2), 91–104.
- Roy, A. (2007). A note on testing of Kronecker product covariance structures for doubly multivariate data. *Proc. Amer. Statist. Assoc., Statistical Computing Section*, 2157–2162.
- Srivastava, M., von Rosen, T., von Rosen, D. (2008). Models with a Kronecker product covariance structure: Estimation and testing. *Mathematical Methods of Statistics* 17, 357–370.
- Thompson, G. L. (1991). A unified approach to rank tests for multivariate and repeated measures designs. *J. Amer. Statist. Assoc.* 86, 410–419.
- Timm, N. H. (1980). Multivariate analysis of variance of repeated measurements. In: Krishnaiah, P. R. (Ed.), *Handbook of Statistics*, Vol. 1, North-Holland, 41–87.
- Werner, K., Jansson, M., Stoica, P. (2008). On estimation of covariance matrices with Kronecker product structure. *IEEE Trans. Signal Process.* 56, 478–491.